Zadania eliminacyjne

Rozwiązania poniższych 10 zadań wraz z formularzem zgłoszeniowym należy przesłać na poniższy adres do dnia 29 kwietnia bieżącego roku (decyduje data stempla pocztowego):

dr Agnieszka Kozak
Instytut Matematyki UMCS
pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1
20 – 031 Lublin

Zadanie 1. W celu skonstruowania kwadratów magicznych o rzędzie nieparzystym można posłużyć się następującą metodą. Najpierw zapisujemy 1 w kratce sąsiadującej z kratką środkową z prawej strony. Następnie poruszamy się po przekątnej do góry i w prawo, wpisując kolejne liczby naturalne. Gdy osiągniemy prawy bok kwadratu kontynuujemy z lewej strony (w przykładzie 3 na 4), a gdy trafimy na górny bok kontynuujemy z dołu (4 na 5). Jeżeli mielibyśmy trafić na kratkę w której jest już liczba, zamiast tego wpisujemy ją w drugą kratkę na prawo od obecnej (w przykładzie 7 na 8). Jeżeli takiej by nie było, to uwzględniamy kratki od lewej strony (w przyładzie 28 na 29).
Na poniższym rysunku przedstawiono kwadrat magiczny o rzędzie 7 skonstuowany tą metodą. Podaj ile wynosi suma liczb w kratkach A2, B3, C5, D10, E12, F7, G8, H11, I1, J15, K9, L4, M13, N6 i O14 w kwadracie magicznym rzędu 15 skonstuowanym przy użyciu tej metody, gdzie litery oznaczają kolejne kolumny a cyfry kolejne wiersze kwadratu.

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

Zadanie 2. Oblicz wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3. Wykaż, że wielomian $W(x) = 10ax^4 - 4ax^3 + a^2x^2 + 6x - 2$ ma w przedziale $[0; \frac{1}{2}]$ pierwiastek rzeczywisty dla każdej wartości $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Dane są następujące trzy funkcje - funkcja zerowania, która dla każdej liczby naturalnej zwraca zero $Z(n) = 0$, funkcja następnika, która zwraca następną liczbę

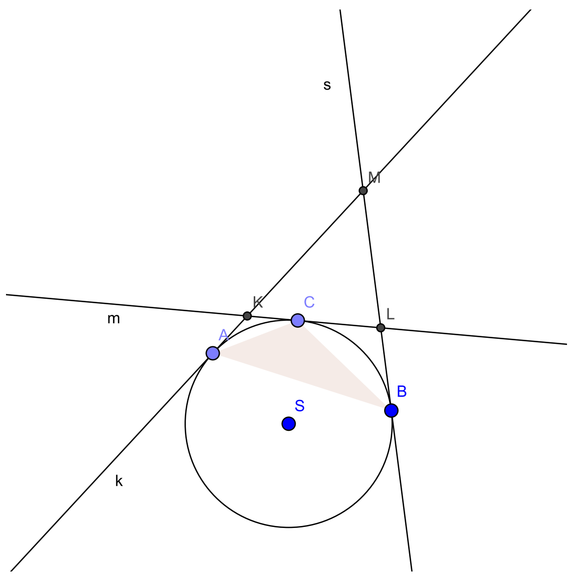
naturalną $S(n) = n + 1$, oraz funkcję rzutowania, która z każdego wektora zwraca liczbę będącą na odpowiedniej współrzędnej $P_k^n(x_1, ..., x_n) = x_k$. Mówimy, że funkcja jest klasy PRIM, jeżeli da się ją utworzyć przy użyciu trzech wymienionych funkcji poprzez złożenia i rekursje, gdzie rekursją nazywamy następującą operację:
$R(x_1, x_2, ..., x_n, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$
$R(x_1, x_2, ..., x_n, S(y)) = g(x_1, x_2, ..., x_n, y, R(x_1, x_2, ..., x_n, y))$.
Na przykład dodawanie jest funkcją klasy PRIM, ponieważ

$$x + y = R(x,\ y) \qquad R(x,\ 0) = x \qquad R(x,\ S(y)) = S(R(x, y))$$

Wykaż, że funkcja będąca silnią jest klasy PRIM.

Zadanie 5. Które z wyrażeń jest większe - $10123021_{(4)} + 162305_{(7)}$ czy $A3B5_{(14)} + 1001100110_{(2)}$?

Zadanie 6. Wyznacz miary kątów trójkąta KLM, więdząc że proste $k,\ m,\ s$ są stycznymi do okręgu przechodzącymi odpowiednio przez punkty $A,\ C,\ B$ leżące na okręgu takie, że $\sphericalangle ABC = 40°$, $\sphericalangle BAC = 30°$, $\sphericalangle BCA = 110°$ a $K,\ L$ i M są punktami przecięcia stycznych.



Zadanie 7. Wiemy, że $17^{1/3}$ znajduje się w przedziale $[2; 3]$. Wynacz jego wartość przybliżoną do trzeciego miejsca po przecinku posługując się metodą bisekcji.

Zadanie 8. Niech k i n, gdzie $k \leqslant n$, będą liczbami naturalnymi. Znajdź ograniczenie górne dla najmniejszej liczby $m = m(n,k)$ dla której istnieje kolorowanie liczb ze zbioru $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ m kolorami takie, że nietrywialny ciąg arytmetyczny długości k jest jednokolorowy. (Wskazówka - wykorzystaj metodę wartości oczekiwanej).

Zadanie 9. Wykaż bez użycia kalkulatora, że $\sqrt{12}^{\pi} < \pi^{\sqrt{12}}$.

Zadanie 10. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych, przy czym znajduje się w niej przynajmniej jedna kula biała i jedna kula czarna. Losujemy jedną kulę. Jeżeli trafimy na czarną, kończymy doświadczenie. Jeżeli wylosujemy kulę białą, to wrzucamy ją do urny i dokładamy jeszcze jedną kulę białą. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że w k-tym losowaniu zakończymy losowanie oraz wykaż, że jeżeli $c = 1$, to $EN = \infty$, gdzie N oznacza ilość losowań. (Wskazówka: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).