

Zasada ekstremum 1

UMCS Lublin, ?? lutego/marca 2009

Zajęcia prowadzi Mariusz Szczepanik

Literatura

1. Arthur Engel "Problem-Solving Strategies", Rozdział 3

Przykłady

Poniższe zadania-przykłady będziemy starali się rozwiązać znajdując ekstremalny (największy lub najmniejszy) element z pewnej grupy elementów, na przykład najmniejszą liczbę z pewnego zbioru wartości, najmniejszą sumę odległości, okrąg o najmniejszym promieniu, dwa najbliższe punkty itp. Niektóre zadania są dość trudne, gdyż nie jest łatwo wskazać właściwą grupę elementów, dla której szukamy ekstremum.

1. (E3) Na płaszczyźnie danych jest n punktów. Każde trzy z tych punktów wyznaczają trójkąt o polu ≤ 1 . Wykazać, że wszystkie n punktów leży w pewnym trójkącie o polu ≤ 4 .
2. (E4) Na płaszczyźnie danych jest $2n$ punktów. Żadne trzy punkty nie leżą na jednej prostej. Dokładnie n z tych punktów są farmami: $F = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$. Pozostałe n punktów są studniami: $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$. Naszym celem jest połączenie każdej farmy z dokładnie jedną studnią prostą drogą. Wykazać, że można przyporządkować studnie do farm wzajemnie jednoznacznie („1 do 1”) tak, że żadne dwie drogi nie przecinają się.
3. (E5) Niech X będzie dowolnym zbiorem punktów płaszczyzny takim, że każdy punkt z X jest środkiem odcinka o końcach należących do X . Wykazać, że X jest zbiorem nieskończonym.
4. (E6) Dany jest dowolny pięciokąt wypukły. Wykazać, że można wybrać trzy przekątne, z których można zbudować trójkąt.
5. (E8) Każdy punkt kratowy (czyli punkt o całkowitych współrzędnych) jest oznaczony liczbą naturalną. Każda z tych liczb jest średnią arytmetyczną czterech sąsiednich liczb (z lewej, z prawej, z góry, z dołu). Wykazać, że wszystkie liczby są równe.
6. (E9) Wykazać, że nie istnieją cztery liczby naturalne (x, y, z, u) spełniające równanie

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2).$$

7. (E10 Problem Sylwestera) Dany jest skończony zbiór S punktów płaszczyzny taki, że każda linia przechodząca przez dwa punkty przechodzi przez trzeci. Wykazać, że wszystkie punkty zbioru S leżą na jednej prostej.
8. (E11) Każda droga w Sikinii jest jednokierunkowa. Każda para miast jest połączona dokładnie jedną drogą. Wykazać, że istnieje miasto, do którego można dojechać z każdego miasta przejeżdżając przez co najwyżej jedno inne miasto.
9. (E12) Dane są wieże na szachownicy $n \times n \times n$. Wieża bije analogicznie jak w szachach, ale w 3 prostopadłych kierunkach: poziomo, pionowo i góra-dół. Ile wynosi liczba wież (oznaczymy ją przez R_n), które biją każde pole szachownicy $n \times n \times n$? Oczywiście k jest najmniejszą liczbą wież na szachownicy $k \times k$, które biją każde pole szachownicy.
10. (E13) Siedmiu karłów siedzi przy okrągłym stole. Każdy ma przed sobą filiżankę. W niektórych filiżankach jest mleko, którego łącznie jest 3 litry. Pewien karzeł dzieli swoje mleko po równo pomiędzy pozostałymi karłami nic sobie nie pozostawiając. Pozostałe karły robią to samo kolejno, przeciwnie do ruch wskazówek zegara. Po tym jak ostatni karzeł podzielił swoje mleko w filiżankach jest taka sama ilość mleka, jaka była na początku. Wyznacz początkową ilość mleka w każdej filiżance.

11. (E14) Każdy uczeń IIIc ma co najwyżej trzech wrogów (przyjmujemy, że relacja jest symetryczna: jeśli A jest wrogiem B, to B jest wrogiem A). Wykazać, że można umieścić uczniów w dwóch salach tak, że każdy uczeń ma w swojej sali co najwyżej jednego wroga.
12. (E16) Wykazać, że w dowolnym n -kącie wypukłym, $n \geq 3$, można wybrać trzy kolejne wierzchołki A, B, C tak, że koło opisane na trójkącie ABC pokrywa cały n -kąt.
13. (E17) Wykazać, że $n\sqrt{2}$ nie jest liczbą całkowitą dla żadnej liczby naturalnej n .